**ЛЕКЦІЇ 1-2**

**Мінімізація булевих функцій**

Булева функція відображає роботу реального технічного пристрою, причому складність функції визначає складність пристрою. Рівносильним логічним функціям відповідають схеми, що виконують однакові завдання. Отже, однакові завдання можна виконувати за схемами різної складності. Тому при проектування цифрових автоматів надзвичайно важливо мати ефективні методи пошуку найраціональніших щодо технічної реалізації форм подання булевих функцій. Для цього використовуються методи мінімізації булевих функцій.

*Мінімізацією булевої функції* називають знаходження найпрості­шого її зображення у вигляді суперпозиції функцій деякої функціональ­но повної системи.

*Канонічна (найпростіша) задача мінімізації булевих функцій.*

***Серед усіх ДНФ, рівносильних даній формулі g, знайти ту, яка містить найменшу кількість букв.***

Зауваження: при підрахунку кількості букв кожна буква врахо­вується стільки разів, скільки вона трапляється в ДНФ.

**О.** Елементарна кон’юнкція *k* називається *імплікантою* булевої функції *f*(*х*1, *х*2, ..., *хn*), якщо на довільному наборі значень змінних, на якому *k* перетворюється в 1, значення булевої функції *f* також дорівнює 1.

**О.** Елементарна кон’юнкція *k* називається *простою імплікантою* булевої функції *f*, якщо *k* є імплікантою функції *f*, а елементарна кон’юнкція, що отримується з *k* вилученням довільної букви, вже не буде імплікантою функції *f*.

Диз’юнкція всіх простих імплікант булевої функції *f* називається *скороченою ДНФ* цієї функції і позначається СДНФ.

***Теорема 1.*** *СДНФ булевої функції f задає цю функцію.*

***Теорема 2.*** *Мінімальна ДНФ булевої функції f отримується із СДНФ цієї функції шляхом вилучення деяких елементарних кон’юнкцій.*

Диз’юнктивна нормальна форма *Д* функції *f* називається її *тупиковою ДНФ* якщо:

1) кожна елементарна кон’юнкція з *Д* є простою імплікантою *f*;

2) вилучення з *Д* довільного диз’юнктивного члена приводить доДНФ*,* яка не задає функцію *f.*

***Теорема 3.*** *Мінімальна ДНФ булевої функції є її тупиковою ДНФ.*

Із теорем 2 та 3 випливає, що знайти мінімальну ДНФ можна у три етапи:

1) побудова скороченої ДНФ;

2) побудова всіх тупикових ДНФ;

3) вибір із знайдених тупикових ДНФ мінімальних ДНФ.

Перший етап мінімізації можна виконати декількома методами.

***Метод Блейка (A. Blake)***

Цей метод ґрунтується на використанні рівносильності узагальне­ного склеювання:  , де ** – довільні формули.

Якщо у цій рівносильності , то говорять, що до членів ** та ** можна застосувати *нетривіальне узагальнене склеювання*.

Метод Блейка полягає в тому, що в довільній ДНФ заданої булевої функції спочатку здійснюють усі допустимі узагальнені склеювання (причому, члени отримані в результаті узагальнених склеювань, знову беруть участь у нових узагальнених склеюваннях).

Після цього здійснюють поглинання, тобто вилучають диз’юнктивні члени виду *AB* у разі наявності диз’юнктивних членів *A* або *B.* У результаті отримують скорочену ДНФ.

***Приклад.***

Побудувати за методом Блейка скорочену ДНФ булевої функції

.

*Розв’язання*

Перший та другий член формули  допускають узагальнені склеювання як по *х*, так і по *у*. Проте члени, які виникають у результаті цих склеювань, дорівнюють нулю. Нетривіальне узагальнене склеювання можливе лише для першого і третього членів формули. Застосуємо це склеювання й одержимо ДНФ .

Для  нетривіальне узагальнене склеювання можна застосувати до першого і третього та другого і четвертого членів. Проте обидва ці склеювання дають члени, які вже є у . Тому всі узагальнені склеювання, які можливі для , вже виконано.

Виконуємо поглинання. Член  поглинається членом . Отри­маємо скорочену ДНФ .

*Відповідь:* .

***Метод Нельсона (R. Nelson)***

Метод полягає в тому, що в довільній КНФ булевої функції розкривають усі дужки відповідно до дистрибутивного закону, а потім виконують усі поглинання.

***Приклад***

Побудувати за методом Нельсона скорочену ДНФ булевої функції

.

*Розв’язання*

Розкриваючи дужки, отримаємо ****







Виконуємо поглинання. Члени *yz*, *xz* та **поглинаються членом *z*. Отримаємо скорочену ДНФ ****.

*Відповідь:* ****.

На *другому етапі мінімізації* знаходять всі тупикові ДНФ, із яких на *третьому етапі* вибирають мінімальні.

Якщо відома ДДНФ, то тупикові ДНФ можна відшукати за ***імплікантною таблицею Куайна (W. Quine).***

*Імплікантна таблиця Куайна* – це прямокутна таблиця, рядки якої позначено різними простими імплікантами функції , а стовпці − конституентами одиниці, що входять у ДДНФ функції *f*. На перетині *р*-го рядка і *k*-го стовпця імплікантної таблиці тоді й лише тоді ставиться значок “\*”, коли імпліканта *р* становить деяку частину конституенти *k* (можливо, збігається з усією конституентою). У цьому разі говорять, що *імпліканта* *р* *накриває* *конституенту* *k*.

Побудову тупикових ДНФ можна здійснити безпосередньо за імплікантною таблицею: якщо у стовпчику є лише однин символ “\*”, то проста імпліканта, яка позначає рядок із цією зірочкою, повина бути вибрана обов’язково. Множина таких простих імплікант називається *ядром булевої функції.* Імпліканти ядра входять у будь-яку тупикову ДНФ, але вони можуть накривати лише частину консти­туент одиниці імплікантної таблиці. Виключають з імплікантної таблиці стовпчики, що мають символ “\*” на перетині з рядками позначеними, імплікантами рядка. Після цього методом перебору можна знайти мінімальні системи простих імплікант, які накривають решту конституент одиниці. Таким способом знаходять всі тупикові ДНФ, із яких вибирають мінімальні.

***Приклад***

Мінімізувати булеву функцію .

*Розв’язання*

*1 етап.* Знаходимо скорочену ДНФ.

Використаємо метод Блейка:



.

*2 етап.* Будуємо всі тупикові ДНФ*.*

Імплікантна таблиця Куайна:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  | \* | \* |  |  |  |
|  |  |  | \* | \* |  |
|  |  |  |  | \* | \* |
|  |  | \* |  |  | \* |

Побудову тупикових ДНФ здійснюємо за імплікантною таблицею. У цьому прикладі ядро утворюють прості імпліканти  та . Імпліканти ядра  та  входять у будь-яку тупикову ДНФ, але вони накривають лише частину конституант одиниці. Лишається не накритою імплікантами ядра конституанта *xyz*. Вона може бути накритою як імплікантою *xz*, так і імплікантою *yz*.

Отже, тупикових ДНФ є дві:

 та 

*3 етап.* Обираємо зі знайдених тупикових ДНФ мінімальні ДНФ.

Знайдені тупикові ДНФ містять по шість букв, тому вони обидві є мінімальними.

*Відповідь*:  , .

Якщо для побудови скороченої ДНФ використовувався метод Блейка або Нельсона, то для побудови тупикових ДНФ користуються ***диз’юнктивним критерієм поглинання (ДКП):***

якщо , то .

***Приклад***

Побудувати тупикові ДНФ функції, яка задана скороченою ДНФ .

*Розв’язання*

Застосуємо диз’юнктивний критерій поглинання до члена *xz.* Маємо.

Отже, проста імпліканта  може бути вилучена зі скороченої ДНФ. Отримаємо ДНФ: .

До жодного із диз’юнктивних членів форми  диз’юнктивний критерій поглинання застосувати не можна. Тому  − тупикова ДНФ.

Для відшукання наступних тупикових ДНФ повертаємося до скороченої ДНФ .

Застосуємо диз’юнктивний критерій поглинання тепер до члена. Маємо . Проста імпліканта  може бути вилучена зі скороченої ДНФ: .

До жодного із диз’юнктивних членів форми  диз’юнктивний критерій поглинання застосувати не можна, тому  − тупикова ДНФ.

До членів  та  скороченої ДНФ  диз’юнктив­ний критерій поглинання застосувати не можна:  та . Тому інших тупикових ДНФ, крім *f1* та *f2*, функція  не має.

*Відповідь:* , .

Булеві функції використовують для спрощення релейно-контакт­них і вентильних схем. У випадку релейно-контактних схем кожній змінній *х* булевої функції  ставлять у відповідність перемикач, який пропускає струм тоді й лише тоді, коли змінна *х* набуває значення 1. Операція кон’юнкція інтерпретується як послідовне з’єднання перемикачів, диз’юнкція – як паралельне з’єднання.

Два електричні ланцюги вважаються еквівалентними, якщо вони одночасно пропускають або не пропускають струм при однакових станах відповідних перемикачів. Із двох еквівалентних ланцюгів простішим вважається той, який складається з меншої кількості перемикачів.

Вентильні схеми складаються з елементарних об’єктів – вентилів трьох типів:

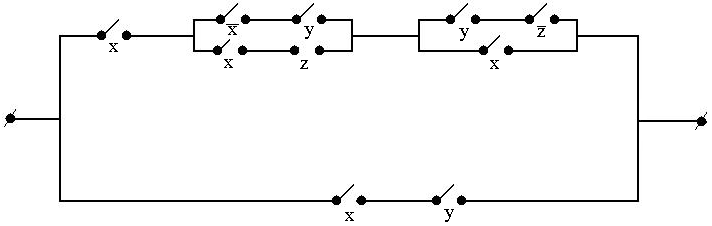
* вентиль з двома входами й одним виходом, на виході отримуємо 1 (наявність напруги), якщо хоч на один із двох входів подається 1;
* вентиль з двома входами й одним виходом, на виході отримуємо 1 (наявність напруги), якщо обидва входи подається 1;
* вентиль з одним входом і одним виходом, на виході отримуємо 1, якщо на вхід подається 0, і на виході отримуємо 0, якщо на вхід подається 1.

***Приклад***

Побудувати контактну схему, робота якої описується функцією . Спростити формулу й накреслити спрощену схему.

*Розв’язання*

Будемо інтерпретувати операцію кон’юнкції як послідовне з’єд­нання перемикачів, диз’юнкції – як паралельне з’єднання. Отримаємо контактну схему:



Спростимо функцію *f*, використавши перший дистрибутивний закон: .

Тоді контактна схема, яка відповідає функції *f,* така:

